

# Master 2: Calibration de modèles: présentation et simulation de quelques problèmes de calibration

## Plan de la présentation

1. Présentation de quelques modèles à calibrer
  - 1a. Reconstruction d'une courbe de taux / forme prédéterminée
  - 1b. Présentation de modèle financier généraux :
    - Modèles de type paramétriques (Heston, Merton, Kou)
    - Modèles à volatilité locale
2. Méthodologie générale et outils
  - ▶ Etape 1 : Simulation d'un modèle donné
  - ▶ Etape 2 : Résolution d'un problème de minimisation
    - Résolution par méthode linéaire
    - Méthode de programmation non linéaire.

## Plan de la présentation

1. Présentation de quelques modèles à calibrer
  - 1a. Reconstruction d'une courbe de taux / forme prédéterminée
  - 1b. Présentation de modèle financier généraux :
    - Modèles de type paramétriques (Heston, Merton, Kou)
    - Modèles à volatilité locale
2. Méthodologie générale et outils
  - ▶ **Etape 1** : Simulation d'un modèle donné
  - ▶ **Etape 2** : Résolution d'un problème de minimisation
    - Résolution par méthode linéaire
    - Méthode de programmation non linéaire.

# Qu'est ce qu'un problème de calibration ?

1. Première étape : Choix d'un modèle donné : position du problème, paramètres d'intérêt ?
2. Seconde étape : savoir simuler le modèle
3. Troisième étape : résolution du problème de calibration en général = problème d'optimisation (linéaire ou non)

# Modélisation (et calibration) de la courbe de taux

On renvoie aux pages 102-103 du polycopié de Tankov.

1. Données de courbe de taux mesurées ou récupérées
2. Choix d'un modèle de courbe de taux  $R$  : en général :

$$R(t) = \sum_{i=1}^M \theta_i \alpha_i(t, \tau),$$

$\theta$  : paramètres linéaires,  $\tau$  : paramètres non linéaires

3. Reconstruction de la courbe de taux = calcul des paramètres du modèle
  - Algorithme d'optimisation linéaire : estimation des  $(\theta_i)$
  - Optimisation non linéaire : estimation des  $\tau_i$
  - ⇒ **Exemples concrets** : cf TOOLBOX optimisation matlab :  
*Standard algorithms* → *Demos Medium scale methods* :  
*datdemo*

# Modélisation (et calibration) de la courbe de taux

On renvoie aux pages 102-103 du polycopié de Tankov.

1. Données de courbe de taux mesurées ou récupérées
2. Choix d'un modèle de courbe de taux  $R$  : en général :

$$R(t) = \sum_{i=1}^M \theta_i \alpha_i(t, \tau),$$

$\theta$  : paramètres linéaires,  $\tau$  : paramètres non linéaires

3. Reconstruction de la courbe de taux = calcul des paramètres du modèle
  - Algorithme d'optimisation linéaire : estimation des  $(\theta_i)$
  - Optimisation non linéaire : estimation des  $\tau_i$
  - ⇒ **Exemples concrets** : cf TOOLBOX optimisation matlab :  
*Standard algorithms* → *Demos Medium scale methods* :  
*datdemo*

# Modélisation (et calibration) de la courbe de taux

On renvoie aux pages 102-103 du polycopié de Tankov.

1. Données de courbe de taux mesurées ou récupérées
2. Choix d'un modèle de courbe de taux  $R$  : en général :

$$R(t) = \sum_{i=1}^M \theta_i \alpha_i(t, \tau),$$

$\theta$  : paramètres linéaires,  $\tau$  : paramètres non linéaires

3. Reconstruction de la courbe de taux = calcul des paramètres du modèle
  - Algorithme d'optimisation linéaire : estimation des  $(\theta_i)$
  - Optimisation non linéaire : estimation des  $\tau_i$
  - ⇒ **Exemples concrets** : cf TOOLBOX optimisation matlab :  
*Standard algorithms* → *Demos Medium scale methods* :  
*datdemo*

# Calibration de modèles plus généraux

## 1. Les modèles dit affines de type paramétriques :

- ▶ **Modèle de Heston** : Dynamique du couple sous jacent/volatilité

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t dW_t$$

$$d\sigma_t^2 = k(\theta - \sigma_t^2)dt + \delta\sigma_t dW'_t, \quad d\langle W, W' \rangle_t = \rho dt$$

ou encore :  $dv_t = k(\theta - v_t)dt + \delta\sqrt{v_t}dW'_t$  avec  $v_t = \sigma_t^2$ ,

- ▶ **Modèle de Merton** : dynamique du sous jacent

$$S_t = S_0 e^{rt + X_t}, \quad X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

avec :  $W_t$  : mouvement brownien standard,  $N_t$  : processus de Poisson (intensité  $\lambda$ ), variables  $(Y_i)$  : gaussiennes, indépendantes

# Calibration de modèles plus généraux

## 1. Les modèles dit affines de type paramétriques :

- ▶ **Modèle de Heston** : Dynamique du couple sous jacent/volatilité

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t dW_t$$

$$d\sigma_t^2 = k(\theta - \sigma_t^2)dt + \delta\sigma_t dW'_t, \quad d\langle W, W' \rangle_t = \rho dt$$

ou encore :  $dv_t = k(\theta - v_t)dt + \delta\sqrt{v_t}dW'_t$  avec  $v_t = \sigma_t^2$ ,

- ▶ **Modèle de Merton** : dynamique du sous jacent

$$S_t = S_0 e^{rt + X_t}, \quad X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

avec :  $W_t$  : mouvement brownien standard,  $N_t$  : processus de Poisson (intensité  $\lambda$ ), variables  $(Y_i)$  : gaussiennes, indépendantes

# Calibration de modèles plus généraux

## 1. Les modèles dit affines de type paramétriques :

- ▶ **Modèle de Heston** : Dynamique du couple sous jacent/volatilité

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t dW_t$$

$$d\sigma_t^2 = k(\theta - \sigma_t^2)dt + \delta\sigma_t dW'_t, \quad d\langle W, W' \rangle_t = \rho dt$$

ou encore :  $dv_t = k(\theta - v_t)dt + \delta\sqrt{v_t}dW'_t$  avec  $v_t = \sigma_t^2$ ,

- ▶ **Modèle de Merton** : dynamique du sous jacent

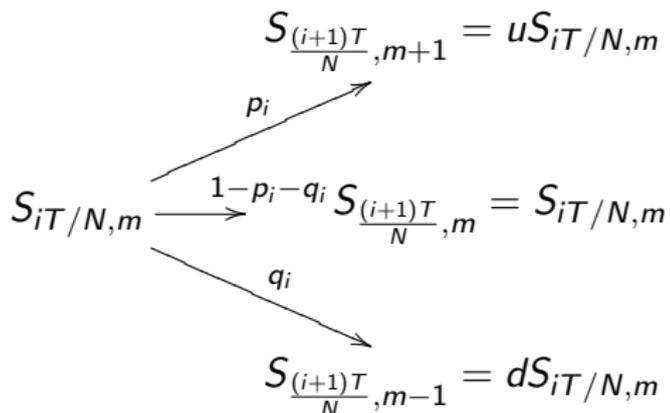
$$S_t = S_0 e^{rt + X_t}, \quad X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

avec :  $W_t$  : mouvement brownien standard,  $N_t$  : processus de Poisson (intensité  $\lambda$ ), variables  $(Y_i)$  : gaussiennes, indépendantes

# Calibration de modèles plus généraux

On renvoie aux pages 28-29 du polycopié de Tankov.

- Example** : Modèle à volatilité locale :  $\sigma = \sigma(t, S_t)$  Actif  $S$  : modélisé par un arbre à  $N$  périodes ( $u, d$  t.q.  $ud = (1 + r\Delta T)^2 = (1 + r\frac{T}{N})^2$ ) :

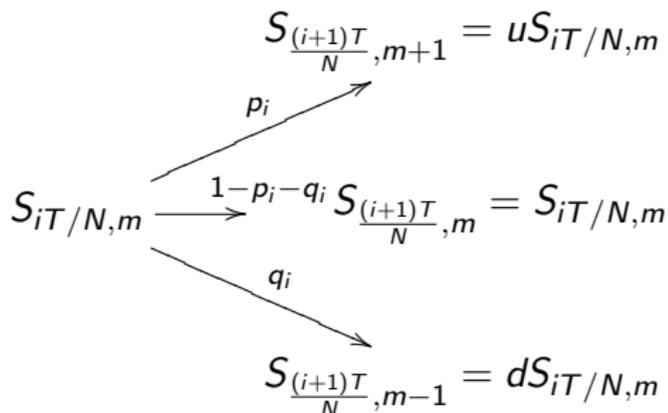


- Intérêt de ce modèle :  
→ calcul des options dépendant de la trajectoire (options asiatiques, barrières) du sous-jacent aisé :

# Calibration de modèles plus généraux

On renvoie aux pages 28-29 du polycopié de Tankov.

1. **Example** : Modèle à volatilité locale :  $\sigma = \sigma(t, S_t)$  Actif  $S$  : modélisé par un arbre à  $N$  périodes ( $u, d$  t.q.  $ud = (1 + r\Delta T)^2 = (1 + r\frac{T}{N})^2$ ) :



2. Intérêt de ce modèle :  
→ calcul des options dépendant de la trajectoire (options asiatiques, barrières) du sous jacent aisé.

## Modèles de type AFFINES (Merton, Heston, Kou)

- Représentation explicite de la fonction caractéristique  $\Psi$ ,
- Prix du call fourni par Fourier inverse,
- Approximation par transformée de Fourier rapide du Call modifié  $z_T$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivk) \zeta_T(v) dv \sim \frac{A}{2\pi} \sum_1^{N-1} \omega_m \exp(-iv_m k) \zeta_T(v_m),$$

avec  $(v_m)$  points équiréparties dans  $[-A, A]$ .

**Interêt principal** : Prix d'option calculé comme une simple somme.

## Modèles de type AFFINES (Merton, Heston, Kou)

- Représentation explicite de la fonction caractéristique  $\Psi$ ,
- Prix du call fourni par Fourier inverse,
- Approximation par transformée de Fourier rapide du Call modifié  $z_T$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivk) \zeta_T(v) dv \sim \frac{A}{2\pi} \sum_1^{N-1} \omega_m \exp(-iv_m k) \zeta_T(v_m),$$

avec  $(v_m)$  points équiréparties dans  $[-A, A]$ .

**Interêt principal** : Prix d'option calculé comme une simple somme.

## Simulation du prix dans un modèles d'arbre

En  $N$  étapes et par évaluation Backward

► Initialisation :  $C^{N,m}(T, K) = \max(S_T^{N,m} - K, 0)$ ,  
 $m = 1, N + 2$ .

► pour tout  $i = N - 1, \dots, 0$ , prix de l'option pour :  $S = S_{\frac{iT}{N}, m}$

$$\begin{aligned} & (1 + r\Delta T) C^{i,m}(T, K) \\ &= p_{i,m} C^{i+1,m+1}(T, K) + (1 - p_{i,m} - q_{i,m}) C^{i+1,m}(T, K) \\ & \quad + q_{i,m} C^{i+1,m-1}(T, K) \end{aligned}$$

$(p_{i,m}), (q_{i,m})$  : probabilités de transition de l'arbre.

**Énoncé du problème :** Étant donné un paramètre noté  $\Sigma$  pouvant être  $n$ -dimensionnel, le problème général de calibration d'une donnée  $C = (C_i)$  (de taille  $N$ ) par rapport au modèle consiste à résoudre

$$\text{Arg min}_{\Sigma \in \mathbb{R}^n} \left( \sum_{i=1}^N |C_i - C_i^{\Sigma}|^2 \right).$$

# Présentation de problème de calibration

**Exemples :** Cas du modèle Black scholes

Dans Black-Scholes standard : un paramètre inconnu : la volatilité.  
Le problème de calibration à Black Scholes revient à résoudre

$$\Sigma^{\text{imp}} = \text{Arg min}_{\Sigma \in \mathbb{R}^n} \left( \sum_{i=1}^N |C_i - C_i^{\Sigma}|^2 \right),$$

$\Sigma^{\text{imp}}$  = volatilité implicite,

Vecteur des  $(C_i)_{i=1, \dots, n}$  = données fournies par le marché ou simulées (à partir de données).

# Présentation des méthodes de calibration

ce type de méthode apparaît dans le pb de reconstruction de courbe de taux.

## Cas d'un problème d'optimisation linéaire

### Exemple : Un problème de moindres carrés linéaires

- 1 Objectif : déterminer

$$\theta = \text{Arg min}_{\mathbb{R}^p} \left( \sum_{k=1}^n w_k \left| \sum_{i=1}^p \theta_i \phi_i(x_k) - y_k \right|^2 \right) = \text{Arg min}_{\mathbb{R}^p} \text{Erreur}(n),$$

- 2  $(y_k)_{k=1, \dots, n}$  = données réelles ou estimées,  $\phi_i$  : fonctions de référence,  $w_k$  poids positifs

- 3 Notations :  $W$  matrice diagonale t.q. :  $\text{diag}(W) = (w_i)$ ,  
 $J$  : matrice de taille  $p \times n$  t.q. :  $J = (\phi_i(x_k))_{\substack{i=1, \dots, p, \\ k=1, \dots, n}}$

- 4 Gradient de l'erreur :

$$\text{Grad}(\text{Erreur}(n))(\theta) = 2(J^T W J)\theta - 2J^T W y \quad (y = (y_k) = \text{données})$$

- 5 Valeur matricielle de la solution

$$\theta_{\min} = (J^T W J)^{-1} (J^T W) y$$

# Présentation des méthodes de calibration

ce type de méthode apparaît dans le pb de reconstruction de courbe de taux.

## Cas d'un problème d'optimisation linéaire

### Exemple : Un problème de moindres carrés linéaires

- 1 Objectif : déterminer

$$\theta = \text{Arg min}_{\mathbb{R}^p} \left( \sum_{k=1}^n w_k \left| \sum_{i=1}^p \theta_i \phi_i(x_k) - y_k \right|^2 \right) = \text{Arg min}_{\mathbb{R}^p} \text{Erreur}(n),$$

- 2  $(y_k)_{k=1, \dots, n}$  = données réelles ou estimées,  $\phi_i$  : fonctions de référence,  $w_k$  poids positifs

- 3 Notations :  $W$  matrice diagonale t.q. :  $\text{diag}(W) = (w_i)$ ,  
 $J$  : matrice de taille  $p \times n$  t.q. :  $J = (\phi_i(x_k))_{\substack{i=1, \dots, p, \\ k=1, \dots, n}}$

- 4 Gradient de l'erreur :

$$\text{Grad}(\text{Erreur}(n))(\theta) = 2(J^T W J)\theta - 2J^T W y \quad (y = (y_k) = \text{données})$$

- 5 Valeur matricielle de la solution

$$\theta_{\min} = (J^T W J)^{-1} (J^T W) y$$

# Présentation des méthodes de calibration

ce type de méthode apparaît dans le pb de reconstruction de courbe de taux.

## Cas d'un problème d'optimisation linéaire

### Exemple : Un problème de moindres carrés linéaires

- 1 Objectif : déterminer

$$\theta = \text{Arg min}_{\mathbb{R}^p} \left( \sum_{k=1}^n w_k \left| \sum_{i=1}^p \theta_i \phi_i(x_k) - y_k \right|^2 \right) = \text{Arg min}_{\mathbb{R}^p} \text{Erreur}(n),$$

- 2  $(y_k)_{k=1, \dots, n}$  = données réelles ou estimées,  $\phi_i$  : fonctions de référence,  $w_k$  poids positifs

- 3 Notations :  $W$  matrice diagonale t.q. :  $\text{diag}(W) = (w_i)$ ,  
 $J$  : matrice de taille  $p \times n$  t.q. :  $J = (\phi_i(x_k))_{\substack{i=1, \dots, p, \\ k=1, \dots, n}}$

- 4 Gradient de l'erreur :

$$\text{Grad}(\text{Erreur}(n))(\theta) = 2(J^T W J)\theta - 2J^T W y \quad (y = (y_k) = \text{données})$$

- 5 Valeur matricielle de la solution

$$\theta_{\min} = (J^T W J)^{-1} (J^T W) y.$$

# Présentation des méthodes de calibration

On renvoie par exemple au pb de régularisation entropique p111 (Tankov)

## Problèmes d'optimisation non linéaire

$$p^* = \text{Arg min}_{p \in \mathbb{R}^n} f(p).$$

→ Principe général : approche du min par itérations successives →  
En général mise en oeuvre de méthode itérative consistant en la construction d'une suite  $(p_i)$

1. Initialisation puis :  $p_{i+1} = p_i - \delta_{p_i}$
2. Stockage de l'erreur :  $\delta_p =$  solution d'un problème de moindres carrés
3. Recherche d'une nouvelle direction de descente →  $p_{i+1}$ .
4. Mise a jour du point  $p_i$  (+ tests adéquats du gradient, de l'erreur,..)

Exemple : algorithme de Levenberg-Marquardt.

# Présentation des méthodes de calibration

On renvoie par exemple au pb de régularisation entropique p111 (Tankov)

## Problèmes d'optimisation non linéaire

$$p^* = \text{Arg min}_{p \in \mathbb{R}^n} f(p).$$

→ Principe général : approche du min par itérations successives →  
En général mise en oeuvre de méthode itérative consistant en la construction d'une suite  $(p_i)$

1. Initialisation puis :  $p_{i+1} = p_i - \delta_{p_i}$
2. Stockage de l'erreur :  $\delta_p =$  solution d'un problème de moindres carrés
3. Recherche d'une nouvelle direction de descente →  $p_{i+1}$ .
4. Mise a jour du point  $p_i$  (+ tests adéquats du gradient, de l'erreur,..)

Exemple : algorithme de Levenberg-Marquardt.