Examen d'analyse 4, L2 Maths- 4 Mai 2010

Durée : 2 heures

Le barême fourni est indicatif.

Exercice 1 ***(4 points)***
Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation suivante :

$$\sin(z) = 2.$$

Exercice 2 ***(7 points)***
Soit a fixé et tel que : $0 < a < \pi$ et soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 - \frac{a}{\pi}\right), & \text{si } x \in [0, a] \\ a\left(1 - \frac{x}{\pi}\right), & \text{si } x \in [a, \pi]. \end{cases}$$

1. Calculer pour tout n, $n \geq 1$, l'intégrale suivante :
$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = b_n.$$
2. Justifier l'égalité suivante : $\forall x \in [0, \pi],\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$.
3. En déduire la valeur de : $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(na)}{n}\right)^2$.

Exercice 3 ***(3+3 points)***
Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E1)$ $y' + xy = xy^2$,

$(E2)$ $y'' - 2y' + y = \exp(x)$.

Exercice 4 ***(5 points)***
Soit (E) l'équation suivante : $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin(x)$.

(1) On appelle (H) l'équation homogène associée : vérifier que $y = x$ est solution de (H) puis donner la forme générale des solutions de (H).

(2) En utilisant la méthode de variations des constantes, résoudre complètement l'équation (E).