UNIVERSITE DU MAINE, LICENCE 1

Outils mathématiques : Contrôle continu du 18/10/12

Durée : 1 heure 30

(Barême indicatif – Formulaire de cours autorisé sans annotations – Calculatrice non autorisée)

Les 3 exercices ainsi que les parties A et B de l'exercice 2 sont indépendants.

(6 pts) **Exercice 1**

(1) Etudier brièvement la fonction $f_1 : x \mapsto x\ln(x)$:
On donnera dans cet ordre le domaine de définition, la dérivée (avec l'étude de son signe) et le tableau de variation **complet** (avec les deux limites et valeur au point d'atteinte de l'extremum).

(2) On introduit les deux fonctions f_2 et f_3 suivantes :

$$f_2 : x \mapsto |x|\ln|x| \text{ et } f_3 : x \mapsto |x+2|\ln|x+2|.$$

(2a) Justifier que le domaine de définition de f_2 est $\mathbb{R}^*$ puis vérifier que :

$$\forall x \neq 0,\ f_2(-x) = f_2(x).$$

En déduire le tableau de variations **complet** de f_2.
Comment obtient-t-on le graphe de f_2 connaissant celui de f_1 ?

(2b) Déterminer le domaine de définition de f_3.
Donner le tableau de variations **complet** de f_3.

(2c) Tracer **sur un même graphe** l'allure des graphes de f_2 et f_3 (on fera clairement apparaitre les tangentes horizontales et verticales et les limites).

(2 pts) (3) ***Bonus.*** Calculer la valeur des intégrales suivantes

$$I_1 = \int_a^1 x\ln(x)dx,\ (0 < a < 1) \qquad \text{puis} \qquad I_2 = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 x\ln(x)dx$$

Déduire des calculs précédents (sans calculs) que $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\ln(|x|)dx = -\frac{1}{2}$.
Quelle propriété de f_2 permet de conclure pour cette dernière intégrale ?

(8 pts) **Exercice 2**

Partie A : Nombres complexes

(1a) Considérons l'équation $Z^6 = 64$. Combien y -t-il de solutions distinctes dans $\mathbb{C}$?
Donner les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation sous forme trigonométrique $\rho e^{i\theta}$.

Dans la suite, on note (z_k) l'ensemble de ces solutions.

(1b) On définit les nombres complexes (z_k') en posant : $z_k' = e^{\frac{i\pi}{12}} z_k$.
Donner le module et l'argument de chaque z_k' en fonction du module et de l'argument de z_k.

(1c) Montrer que la famille des nombres complexes (z_k') forme l'ensemble des solutions de l'équation $Z^6 = a$, où a est un nombre complexe que l'on déterminera.

Partie B : Géométrie

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique. Tout point M est déterminé de manière unique par ses coordonnées (x, y, z) ce qu'on notera simplement $M\ (x, y, z)$.

(2a) Montrer que les points $A\ (1, 0, 0)$ $B\ (0, 1, 0)$ et $C\ (1, 1, -1)$ définissent un plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$.

(2b) Calculer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathcal{P}$ puis en déduire l'équation cartésienne de ce plan.

(2c) Soient $M_1\ (0, 0, 1)$ et $M_2\ (1, 1, 1)$. Calculer $d(M_1, \mathcal{P})$ puis $d(M_2, \mathcal{P})$.

(6 pts) **Exercice 3**

(1a) Résoudre les deux équations différentielles suivantes

$$y' - 2y = 0 \qquad \text{et} \qquad y'' + 2y' + 2y = 0.$$

(1b) En déduire l'ensemble de toutes les solutions de

$$y' - 2y = x\exp(-x) \qquad \text{et} \qquad (E_1)$$

$$y'' + 2y' + 2y = \cos(x) \qquad (E_2)$$

<u>Indication</u> : On cherchera une solution particulière sous la forme
$y_0 : x \mapsto (ax + b)\exp(-x)$, pour l'équation (E_1),
$y_0 : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ pour l'équation (E_2)
