UNIVERSITE DU MAINE, LICENCE 1

Outils mathématiques : Contrôle continu du 27/09/12 .

Durée : 1 heure 30 (Barême indicatif- Formulaire de cours autorisé sans annotations)

Les 3 exercices ainsi que les parties A et B de l'exercice 2 sont indépendantes.

Exercice 1 *7 points*

(1) Résoudre successivement dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivante

$$|x-1| = x^2 + x - 1 \text{ et } |x-1| \leq x^2 + x - 1.$$

(2a) En utilisant une des formules d'addition, développer puis simplifier : $\sqrt{2}\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$.

(2b) Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation suivante :

$$\cos(\theta) - \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

puis en déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$.

(2c) Représenter (le plus précisément possible) les solution dans $[0, 2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Exercice 2 *7 points*

Partie A

(1a) Donner le module et l'argument (unique dans $[0, 2\pi[$) des complexes suivants

$$-1,\ \sqrt{3} - i;\ 1 + i$$

en déduire le module et l'argument de $-\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}$.

(1b) A partir de la question précédente, déduire les valeurs exactes de

$$\cos(\frac{7\pi}{12}),\ \sin(\frac{7\pi}{12}) \text{ puis de } \cos(\frac{\pi}{12}).$$

Partie B

(2a) Donner l'expression (sous forme $\rho e^{i\theta}$) de toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de $Z^4 = 1$. Combien sont réelles ?

(2b) Mêmes questions pour $Z^5 = 1$.

(3) *Bonus (1,5 point)* Déduire de la question (1a) l'ensemble des solutions de $Z^4 = 16i$.
Indication Donner les solutions sous forme trigonométrique en commençant par écrire 16i sous forme trigonométrique.

Exercice 3 *6 points*

(1) On considère les deux fonctions f_1 et f_2 suivantes

$$f_1(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)}{x^2 + x + 1} \text{puis } f_2(x) = \sqrt[3]{f_1(x)}$$

(1a) Justifier que f_1 et f_2 sont définies sur $\mathbb{R}$ puis calculer leurs dérivées respectives $f_1^{'}$ et $f_2^{'}$.

(1b) Vérifier que la dérivée $f_2^{'}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}; \frac{(3+\sqrt{5})}{2}\}$.

(2a) Etudier le signe de $f_1^{'}$ puis en déduire celui de $f_2^{'}$.
(on rassemblera les résultats sous forme d'un tableau de signe).

(2b) Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{(3-\sqrt{5})}{2}} f_2^{'}(x)$ et $\lim\limits_{x \to \frac{(3+\sqrt{5})}{2}} f_2^{'}(x)$?

Qu'en déduire concernant les tangentes au graphe de f_2 en $x = \frac{(3-\sqrt{5})}{2}$ et $x = \frac{(3+\sqrt{5})}{2}$?

(3) *Bonus (+1,5 point)* Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction f_2 (en précisant les limites en $+\infty$, $-\infty$ ainsi que les valeurs de f_2 aux deux points de minimum et maximum).